MICROFICHE N°

00924

République Tunisienne

MINISTERE DE L'AGRICULTURE

CENTRE NATIONAL DE

DOCUMENTATION AGRICOLE

TUNIS

الجمهورية التونسية

وزارة الفلاحة

المركز القومي

للتوثيق الفلاحي

تونس

F 1

CNDA 924

8 FEV. 1977

DIVISION DES RESSOURCES EN EAU

--*-*-*

COMPTE RENDU DE FIN DE MISSION AU CENTRE D'HYDROGEOLOGIE MATHEMATIQUE A FONTAINEBLEAU

(FRANCE DU 4 AU 15 OCTOBRE 1976)

OCTOBRE 1976

A. MAMOU

CH.T.
REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'AGRICULTURE
DIRECTION DES RESSOURCES EN EAU
ET EN SOL
DIVISION DES RESSOURCES EN EAU
SERVICE HYDROGEOLOGIQUE

COMPTE RENDU DE FIN DE MISSION AU CENTRE D'HYDROGEOLOGIE MATHEMATIQUE A FONTAINEBLEAU

-=-=-=-=-=-=-=-=-

(FRANCE DU 4 AU 15 OCTOBRE 1976)

OCTOBRE 1976

A. MAMOU

COMPTE RENDU DE FIN DE MISSION AU CENTRE
D'HYDROGEOLOGIE MATHEMATIQUE
A FONTAINEBLEAU

-=-=-=-=-=-=-=-=-

(FRANCE DU 4 AU 15 OCTOBRE 1976)

1 - BUT DE LA MISSION : Cette mission a été conçue dans le cadre d'un recyclage en hydrogéologie mathématique au centre de Recherche de Fontainebleau (France). Le but de ce recyclage est de permettre aux hydrogéologues d'avoir un contact avec les modèles mathématiques et de voir leur champ d'application pour les simulations des nappes aquifères ainsi que pour les eaux de surface et pour l'évaluation des bilans en eau.

2 - PROGRAMME DU RECYCLAGE

Jour	9H0 - 10H30	10H45 - 12H15	14H15 - 16H00	16H15 - 17H45
LUNDI 4/10/1976	Réception des Participants	Notions générales d'Hydrogéologie Principe des modèles	Présentation du programme N E W S A M	Présentation de l'exercice C A M L I B E L
MARDI 5/10/1976	Hydrogéologie mathématique Meth. des différences finies	C A M L I B E L	Méthode des différences finies	C A M L I B E L
MERCREDI 6/10/1976	Méthodes des éléments finis	C A M L I B E L	Méthodes des éléments finis	C A M L I B E L
JEUDI 7/10/1976	Rappel de notions mathématiques	C A M L I B E L	Résolution des systèmes linéaires	C A M L I B E L
VENDREDI 8/10/1976	Résolution des systèmes linéaires cas du régime permanent	C A M L I B E L	Résolution des systèmes linéaires cas du régime transitoire	C A M L I B E L
LUNDI 11/10/1976	Structure générale d'un programme	Construction d'un maillage	Modélisation des aquifères profonds modèles multicouches	Construction d'un maillage (programmation)
MARDI 12/10/1976	Entrées-Sorties (programmation)	Programmation (notions sur ordinateur)	Gestion des ressources en eau	Le regime permanent (programmation)

.../...

MERCREDI 13/10/1976	Le régime permanent (programmation)	Le régime permanent (programmation)	Modèle de transport : théorie de la dispersion	Le régime permanent (programmation)
JEUDI 14/10/1976	Le regime transitoire (programmation)	Le régime transitoire (programmation)	Méthode de la déconvolution	Le régime transitoire (programmation)
VENDREDI 15/10/1976	Le krigeage en hydrogéologie calage des modèles	Mise en point du programme	Clôture du recyclage	

De l'ensemble de ce programme qui est a été appliqué en totalité ; se dégagent deux aspects du recyclage :

- Aspect théorique
- Aspect pratique

3 - ASPECT THEORIQUE

3-1 - Principe des modèles mathématiques

Un modèle est une structure physique définie suivant certaines caractéristiques. On construit un modèle dans le but de définir et de quantifier le comportement d'un ou de plusieurs facteurs qui sont susceptibles de varier au sein de cette structure.
La construction d'un modèle mathématique repose sur l'identification de la structure physique (système) à partir de certains paramètres variables connus ou à définir. Les paramètres sont liés les uns aux autres suivant une relation de causalité traduisant l'évolution dans le temps.
On définit ainsi trois types de relations de causalité :

- Relations phénomenologiques : traduisant un certain phénomène (ex : la loi de DARCY)
- Relations parametriques : reliant deux ou plusieurs paramètres (ex : $Q = f(P)$). Ce genre de relations dépend d'une identification mathématique
- Relations statistiques : Pour l'étude d'une certaine population mal définie, on part d'un échantillon sur lequel on étudie un ou plusieurs paramètres.

Dans le domaine hydrogéologique ; un modèle mathématique est défini sur une certaine superficie avec des conditions aux limites bien déterminées. On suppose que les caractéristiques hydrogéologiques sont relativement homogènes.

.../

3-2 - Construction d'un modèle mathématique :

3-2-1 - Echelle du modèle : L'échelle peut être celle :

- d'un bassin hydrogéologique avec plusieurs nappes en communication
- d'une nappe
- d'une portion d'un aquifère.

Dans le cas d'un bassin hydrogéologique ou celui d'une nappe l'extension horizontale est importante par rapport à l'extension verticale. Sa prédominance permet de négliger les variabilités verticales et de ne considérer l'écoulement que dans le plan. L'écoulement est ainsi dit "bi-dimentionnel"

3-2-2 - Choix des relations et paramètres : Les relations mathématiques définies à l'échelle microscopique ne permettent pas de représenter dans la pratique, une nappe ou un bassin hydrogéologique ; c'est pourquoi on est obligé de déterminer des éléments de volume à l'échelle microscopique, permettant le passage en milieu continu.
Les trois équations qui déterminent l'écoulement ; dans ce cas, en milieu poreux saturé sont :

1) - L'équation de continuité

$$\operatorname{div}(\rho v) + \rho q + \frac{\partial (E\rho)}{\partial t} = 0$$

ρ : Masse volumique
v : Vitesse d'écoulement de DARCY
E : Masse stockée

2) - L'équation du mouvement : Comme exemple, on peut considérer l'équation du mouvement en milieu homogène et isotope connue sous le nom de "la loi de DARCY" :

$$V = - K \operatorname{Grad} h$$

V : Vitesse moyenne de filtration suivant une surface
K : Perméabilité horizontale
h : Charge hydraulique $\quad h = \frac{P}{\rho} + z$
p : Pression
z : Côte par rapport à la verticale
ρ : Masse volumique.

.../...

3) - L'équation d'état : On suppose que l'écoulement est isotherme et que les fluides sont incompressibles ; dans ce cas on suppose que la variation de la masse ne se fait que dans le temps et non dans l'espace. Dans ce cas la masse volumique reste constante.

3-2-3 - Discrétisation : C'est le découpage de la surface de la nappe en un maillage suivant une géométrie donnée. Le maillage peut être uniforme ou non.

3-3 - Méthode des différences finies : Cette méthode repose sur le principe de calculer à partir d'une équation infinie d'une fonction mathématique des valeurs numériques finies. Les paramètres et les inconnues sont discrétisés en mailles carrées de dimensions constantes. On part du principe suivant :

- "La somme des flux au sein d'une maille entourée par ses quatres voisins représente la somme des flux entrant et sortant de cette maille".
  C'est le principe de conservation de masse.

Le domaine étant discrétisé en mailles ; (n) étant le nombre des mailles, on obtient un système de n équations linéaires à n inconnues. Ce système peut être écrit sous forme d'une matrice :

$$T.H = Q$$

T : la matrice carrée d'ordre n dont les éléments sont les coefficients des inconnues hi dans les n équations du système.
Les éléments de T s'expriment en fonction des valeurs de la transmissivité aux noeuds du réseau et de la dimension des mailles.

H : Le vecteur dont les n composantes sont les valeurs inconnues hi de la côte piézométrique aux n noeuds.

Q : s'exprime en fonction des données du problème qui sont les débits de transfert, les transmissivités, les potentiels et les flux imposés.

La matrice ainsi définie est dite "matrice de l'hydrogéologie".
Elle présente les caractéristiques suivantes :

- la modification des débits de transfert n'influe pas sur la matrice
- Elle est diagonalement dominante au sens large, c'est à dire que la valeur absolue de l'élément diagonal est égale à la somme des valeurs absolues des éléments extra-diagonaux.
- Elle est irréductible : pour qu'une matrice soit irréductible il faut et il suffit qu'il existe une succession de chemins menant d'un point à un autre.
- Inversible : la valeur absolue de l'élément diagonal est strictement supérieure à la somme des valeurs absolues des éléments extra-di

3-4 - Méthode des éléments finis : Le triangle constitue l'élément de base de la discrétisation du système. Sur ce triangle, on détermine l'équation d'approximation qui est caractérisée comme suite :

- Les sommets des triangles constituent les noeuds du réseau de maillage et la variable est noeudale c'est à dire que sa dérivée est discontinue.
- La fonation potentiel étant h (s,y) on l'approxime en H (s,y)

$$H(x,y) = ao + a_1x + a_2y$$

On suppose que les paramètres sont constants sur la surface du triangle.
- L'équation du mouvement exprimée par la loi de DARCY devient :

$$v = -T \Bigg/ \begin{matrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{matrix}$$

T : scalaire dans le cas d'un milieu isotope

donne

$$v = -T \Big/ \begin{matrix} a1 \\ a2 \end{matrix}$$

La détermination de la côte piezométrique (h) en tout point du domaine de l'écoulement se ramène, sous l'hypothèse de linéarité, au calcul de (h) en un nombre fini de noeuds de travail. La valeur de (h) étant par ailleurs imposée en un certain nombre d'autres noeuds. La matrice d'un système discrétisé suivant la méthode des éléments finis est :

- Irréductible
- Inversible (Il suffit donc que le maillage comporte au moins un noeud à potentiel imposé)

Le problème ainsi posé admet une seule solution trouvée linéairement à partir d'un système de n équations à n inconnues.

3-5 - Résolution des systèmes linéaires : un système linéaire est de la forme :

$$ax + by = c$$
$$a'x + n'y = c'$$

L'approximation d'une équation mathématique est sa transformation linéaire en un système d'équations suivant la méthode des différences finies ou des éléments finis de telle façon que ce système admet une solution unique facilement approchable par approximation successive.

3-5-1 - Méthode directe : ou méthode de GAUSS-JORDAN : Elle resoud un système d'équations par substitutions successives par combinaisons linéaires et simplification de l'équation. Ceci équivant à des matrices qu'on triangularise. C'est après avoir mis la matrice sous sa forme triangulaire qu'on définit :

...

- Les pivaux : ce sont les différents coefficients diagonaux.
  Les pivaux ne sont nuls que si la matrice est insoluble.
- Si les vecteurs de base de la matrice sont presque parallèles, les pivaux tendent vers zéro. De telles valeurs proches de zéro se repercutent sur l'ensemble des opérations à suivre et les valeurs ainsi calculées seront approximées à des zéros.

Cette méthode nécessite le stockage de la totalité de la matrice. Cette opération surcharge la mémoire de la machine ce qui rend le temps de calcul (temps-machine) plus long.

3-5-2 - Méthode des itérations ou méthode de JACOBI : Soit la solution de l'équation f (x) = 0

La méthode itérative consiste en la transformation :

$$f(x) = 0 \Longrightarrow \text{il existe } x \text{ tel que } Q(x) + x = 0$$

c'est à dire

$$f(x) = Q(x) + x$$

La méthode des itérations a été raffinée par deux processus :

- Itérations par point ou méthode de relaxation :

  Pour un système de (n+1) équations à (n+1) variables on définit (R)

$$R = \frac{x_n^* - x_n}{x_n - x_{n+1}}$$

x_n^* : c'est la valeur de x_n calculée par la dernière itération x_n

x_n : variable de l'ordre de n

La méthode de relaxation de l'itération par point utilise les valeurs de la variable x calculées précedemment (comme x_n^*) pour le calcul des valeurs de x d'un ordre suivant.
(R) reste convergent pour des valeurs comprises entre 0 et 2 et diminue pour les valeurs entre 0 et 1. La valeur optimale du coefficient (R) est liée à la valeur de la matrice itérée.

- Itérations par blocs : au lieu de faire des itérations par point, on groupe certaines mailles en bloc et on procède en faisant des itérations sur ces blocs. Cette méthode est applicable dans le cas d'une nappe limitée par deux potentiels imposés ainsi que dans le cas d'un système multicouche où chaque couche est traitée comme un bloc unique.

.../...

3-5-3 - Méthode des itérations alternées : C'est la discrétisation dans le temps (régime transitoire).

- Méthode explicite : L'ensemble de (n) équations associées aux (n) mailles de travail équivant à l'équation matricielle suivante :

$$T \,.\, H + S \,.\, \frac{d}{dt} H = Q$$

T : Transmissivité

S : Coefficient d'emmagasinement

H : Potentiel hydraulique

Q : Débit.

Dans le cas de la méthode explicite la valeur moyenne du vecteur T.H. est approchée par la valeur de ce vecteur à l'instant, début de l'intervalle de temps. Ainsi on calcule directement H* sans qu'il soit nécessaire de recourir à un processus itératif. L'inconvénient de cette méthode est que l'approximation de T.H. n'est valable que pour de très faibles valeurs du pas de temps t.

- Méthode implicite : Dans ce cas l'équation

$$T.H + s \frac{d\ H}{dt} = Q$$

devient

$$\overline{T.H} = (1 - \theta)\ T.H + \theta\ .\ T.H^*$$

H* : potentiel précedemment calculé

$o < \theta < 1$

Cette méthode s'adapte à des pas de temps d'approximation grands.

3-6 - Le krigeage en hydrogéologie : Sur un domaine donné et à partir d'un nombre réduit de mesures, on détermine les caractéristiques d'un point en se basant sur les mesures disponibles.
Le krigeage permet automatiquement de définir la localisation où la mesure supplémentaire quelle que soit sa valeur, augmente au mieux la connaissance de l'ensemble du système. Le krigeage intervient ainsi en reconnaissance géologique du système en construisant un estimateur optimal. Il met en évidence les défauts d'informations pour le système en faisant l'étude de la variance de l'estimation.

3-7 - La déconvolution : La déconvolution permet l'étude des relations :

$$H = f(P)$$
$$Q = f(P)$$

.../...

H : Niveau d'une rivière

Q : Débit d'une rivière

P : Pluie sur un bassin versant

La déconvolution permet de compléter la série des mesures du niveau et du débit d'une rivière en partant d'une série de pluies plus longue. L'intérêt de cette méthode c'est quelle permet de faire des prévisions à long terme. En connaissant la réponse impulsionnelle T (τ) et la pluie P (t), le débit de la rivière Q (t) est donné par :

$$Q(t) = \int_0^T P(t-\tau)\, T(\tau)\, d\tau$$

On appelle déconvolution la recherche T

3-8 - <u>Théorie de la dispersion</u> : La théorie de la dispersion d'un corps solide en milieu (aquifère) poreux permet d'étudier la pollution. Un cas particulier en hydrogéologie est celui de la contamination des nappes par des eaux salées. L'équation du mouvement de la dispersion est la suivante :

$$\mathrm{div}\left(K\rho\ \mathrm{grad}\ \frac{c}{\rho}\right) - \mathrm{div}\,(n.c) = \frac{dc}{dt}$$

K : tension de dispersion = ensemble des facteurs mécaniques et chimiques de la dispersion

ρ : masse volumique

c : concentration en corps solide

n : vitesse moyenne d'écoulement à l'échelle du pore

div : terme de convexion

dt : variation du temps.

La dispersion peut être :

- soit physico-chimique liée à la nature du solvant et aux forces ioniques et autres
- soit mécanique : résultant de l'écoulement en milieu poreux.

La dispersion est fonction d'un certain nombre de paramètres qui sont caractéristiques du milieu et d'autres qui sont caractéristiques du fluide.

3-9 - <u>Exploitation intégrée des ressources en eau d'un bassin</u> : c'est l'utilisation des modèles mathématiques pour l'intégration des ressources en eau d'un bassin tout en prévoyant l'exploitation et sa repercussion sur l'essor économique de la région pour une durée de temps moyenne de 20 à 30 ans.

.../...

Les modèles interviennent à différentes phases et intègrent plusieurs facteurs qui peuvent influencer la vie économique de la région et qui sont en relation avec les ressources en eau.

4 - ASPECT PRATIQUE : Le recyclage comportait deux parties pratiques qui consistent en :

1/ - L'utilisation du programme NEWSAM pour la simulation d'une nappe :
(Nappe de CAMLIBEL en TURQUIE)

Partant d'un maillage adéquat et d'un ensemble de données hydrogéologiques, on a calculé les données nécessaires à la simulation tout en précisant les conditions aux limites.

La phase suivante étant l'entrée des données ainsi élaborées en les affectant au Centre de la maille. Cette entrée se fait en "language machine" sous forme de bordereaux et suivant la notice du programme NEWSAM.

La troisième phase est la perforation des données puis le passage des cartes ainsi perforées à l'ordinateur.

La sortie des résultats se fait sous forme de cartes (piézométrie et transmissivité) ou sous forme de tableaux (débit, coefficient d'emmagasinement, potentiels imposés etc ...).

Le but étant d'obtenir une piézométrie calculée en régime permanent aussi similaire que possible à celle adoptée au départ. Pour ceci on passe par plusieurs corrections au niveau des données imposées (transmissivités, débits d'alimentation, débits drainés etc ...). Cette phase aboutie au calage du modèle dans des conditions qu'on juge adéquates.

La dernière phase est de faire fonctionner le modèle en régime transitoire ce qui revient à l'établissement d'un programme d'exploitation variable au cours du temps.

2/ - L'établissement d'un programme permettant la simulation d'une nappe :

Ce programme est le code à adopter pour permettre la transcription en "langage machine" de toutes les données hydrogéologiques dont on peut avoir besoin pour la simulation d'une nappe.

Dans ce programme on prévoit les deux régimes d'écoulement à simuler :

- le régime permanent
- le régime transitoire.

.../...

Le bon fonctionnement de ce programme est vérifié par simulation des données théoriques introduites au cours des différentes phases de programmation.

5 - CONCLUSION

On remarque la nécessité d'avoir une connaissance solide du langage FORTRAN pour tout hydrogéologue voulant faire l'hydrogéologie mathématique.

L'intérêt d'un recyclage en hydrogéologie mathématique pour un hydrogéologue c'est qu'il permet de faire une synsthèse des données hydrogéologiques tout en permettant de manipuler les données quantitatives avec une possibilité de combinaison et d'emploi plus grande.

A. MAMOU

FIN

12

VUES